Пример 1. *Провести анализ управляемости и декомпозицию системы по управлению*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_3, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + u, \\ \dot{x}_3 = -x_2 - x_3. \end{cases}$$

Решение:
Запишем систему в матричном виде

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

и вычислим грамиан управляемости

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Ab = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A^2 b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\operatorname{rank} W = 2 \Rightarrow$ система не является полностью управляемой. Проведем декомпозицию по управлению. Приведем систему к базису $(g^1 = b, g^2 = Ag^1, f^1)$, где $f^1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}^T$ ортогонален g^1, g^2: $(f^1, g^1) = (f^1, g^2) = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0, \alpha_1 - \alpha_3 = 0$. То есть $f^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$.

$$Ag^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2g^1, \quad Af^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = g^2.$$

Сделаем замену переменных $x = \xi_1 g^1 + \xi_2 g^2 + \eta f^1$:

$$\begin{cases} x_1 = \xi_2 + \eta, \\ x_2 = \xi_1 + \xi_2, \\ x_3 = -\xi_2 + \eta. \end{cases}$$

Для записи системы в новых переменных, подставим замену переменных в правую и левую части выражения $\dot{x} = Ax + bu$ и приведем подобные члены при соответствующих базисных векторах g^1, g^2, f^1:

$$\dot{x} = \dot{\xi}_1 g^1 + \dot{\xi}_2 g^2 + \dot{\eta} f^1 = Ax + bu = \xi_1 g^2 + \xi_2 2g^1 + \eta g^2 + g^1 u.$$

В новом базисе

$$\begin{cases} \xi_1 = -\frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3, \\ \xi_2 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3, \\ \eta = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = 2\xi_2 + u, \\ \dot{\xi}_2 = \xi_1 + \eta, \\ \dot{\eta} = 0. \end{cases}$$

Подсистема (ξ_1, ξ_2) является полностью управляемой, переменная η является неуправляемой.